Llibres

En aquest número de **SCM/Notícies** incloem dos articles on es comenten llibres però, alhora, els autors hi aporten moltes idees interessants.

Al **SCM/Notícies**/4 vàrem publicar un article de Josep Pla i Carrera on convidava tothom a col·laborar en successius números de la revista i difondre una biblioteca de textos d'epistemologia, història i didàctica de les matemàtiques. Ell mateix continua avui amb la línia de treball que s'havia marcat.

L'altre article es pot considerar part d'aquesta col·laboració i és una traducció, convenientment autoritzada per l'autor, d'un article que Morris W. Hirsch va publicar al butlletí de l'AMS. Es comenta un llibre de Penelope Maddy, en què es defensa la realitat plena dels objectes matemàtics.

La cresta del pavo real

The Crest of the Peackock: Non-European Roots of Mathematics
GEORGE CHERVERGHESE JOSEPH. I. B. Tauris. Londres, 1991

La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas
Traducció al castellà de Jacobo Cárdenas
Ediciones Pirámide, SA. Madrid, 1996

Article de JOSEP PLA I CARRERA
Facultat de Matemàtiques
Universitat de Barcelona

És força corrent defensar que la cultura occidental s'ha forjat a partir de la Grècia clàssica i que, de fet, l'Imperi romà en selecciona el millor de la filosofia, la retòrica, la literatura i l'art, i fins i tot de la ciència, l'arquitectura i l'enginyeria. Aquesta posició classicitzant s'estén amb naturalitat a la matemàtica, com podem veure llegint els fragments següents:

> La història de les matemàtiques no pot remuntar-se amb certesa a cap escola o període anterior al dels grecs jònics. [ROUSE BALL, W. W., *A Short Account of the History of Mathematics*, 1908, 1.]

> [Els matemàtics] finalment es van assegurar un domini nou sobre la vida en el terreny altament favorable de Grècia, i durant un temps curt van créixer amb força... Amb la caiguda de la civilització grega, la planta va romandre en estat latent durant mil anys... fins que fou trasplantada a Europa en un sòl fèrtil. [KLINE, M., *Mathematics in Western Culture*, 1953, p. 9-10.]

En contrast amb aquestes opinions, al text de E. T. BELL, *The Development of Mathematics*, 1940, edició castellana de 1985, p. 25–26, hi podem llegir:

> Una divisió convencional de l'escala del temps separa la història de la matemàtica en set períodes:
>
> 1. Des de l'antiguitat més remota a les antigues Babilònia i Egipte.
> 2. La contribució grega, des del 600 aC fins el 300 dC
> 3. Els pobles orientals i semítics —indi, xinès, musulmà, jueu, etc.— abracen un període que comença força abans del 600 aC i s'acaba al segle XIV.
> 4. L'Europa del Renaixement i la Reforma, que cobreix els segles XV i XVI.
> 5. Els segles XVII i XVIII.
> 6. El segle XIX.
> 7. El segle XX.
>
> Aquesta divisió segueix el desenvolupament general de la civilització occidental i el seu deute amb el Pròxim Orient d'una manera molt vaga.

Val a dir que és difícil de seguir amb detall la influència sobre Occident de la matemàtica del tercer període, però també és cert que és innegable. Aquesta opinió és antiga, com posen de manifest les paraules, escrites l'any 662 pel bisbe nestorià SEVERUS SEBOKHT, procedent de Kenehra, la part alta de l'Eufrates:

> Ometre tota mena de discussió sobre la ciència dels indis, un poble diferent dels assiris, sobre els seus descobriments utilíssims en astronomia, molt més enginyosos que no pas els dels grecs i els dels babilonis, i també sobre els seus mètodes de càlcul, absolutament valuosíssims, que sobrepassen qualsevol descripció. Només vull dir que aquests càlculs es fan en base a nou símbols. Si

> els qui creuen que, pel fet de parlar en grec, han assolit els límits de la ciència, llegissin els textos que he esmentat, potser es convencerien, encara que fos una mica tard, que existeixen d'altres persones que també coneixen coses meravelloses.

Aquesta idea, conèixer les coses meravelloses que, en matemàtica, sabien els pobles que no són de cultura, ni d'influència grega, és el que ens proposa GEORGE GHERVERGHESE JOSEPH a *La cresta del pavo real.*

Ens podem preguntar, és ben lícit, quin interès pot tenir aquesta lectura i aquesta presentació alternativa de la matemàtica. La resposta és triple.

D'una banda, per a una millor comprensió de la cultura matemàtica occidental, perquè ajuda a entendre com Occident va aconseguir superar l'*època fosca*. Mentre Europa, anorreats el pensament i la cultura de la Grècia pagana, dorm en un son profund, en el qual les ciències s'obliden, i entre elles les matemàtiques, d'altres pobles més o menys allunyats d'Occident, les mantenen vives, i ho fan amb un gran poder creador que fa que creixin i es desenvolupin amb força.

D'una altra, en certs països d'Europa, on la immigració ha crescut molt fortament en els darrers anys, hom cerca arrels culturals de les ètnies i cultures minoritàries, a fi d'introduir els ensenyaments d'acord amb les arrels culturals de cada minoria. Neix així el que es coneix com la *multicultural mathematics* de la qual, a la Gran Bretanya, JOSEPH és un dels seus artífexs més notables. [Vegeu, per exemple, D. NELSON i d'altres, *Multicultural Mathematics*. Oxford University Press, 1993.]

Finalment, pel que fa a l'ensenyament de la matemàtica a casa nostra, el llibre de JOSEPH mostra de quina manera es van plantejar —i de quina manera es van resoldre— moltes qüestions que es troben en els programes de l'ESO i del batxillerat. A més, les resolucions que aquests pobles van trobar són, en general, senzilles i elegants, i poden ser motivadores pels nostres estudiants en la mateixa línia que el llibre *Journey through genius* de WILLIAM DUNHAM. John Wiley & Sons. Nova York, 1990. [Hi ha una traducció al castellà de JACOBO CÁRDENAS. Ediciones Cátedra. Madrid, 1992.]

Aquestes tres qüestions són, de fet, les que més explícitament o implícita han motivat en l'autor l'elaboració del llibre, com manifesta ja des del començament.

Deixem, però, de banda aquestes disquisicions i centrem-nos en els continguts. Sobretot en aquells que, al meu parer, cal retenir com a realment importants.

El text comença amb la matemàtica més primitiva. L'art de comptar de l'Àfrica central, fent servir ossos. Seguidament viatgem a Sudamèrica, on descobrim els *quipus* —una paraula *quetxua*— propis de la cultura inca. Són cordes amb nusos, que serveixen per comptar i també l'àbac inca. La cultura maia ens mostra el seu *sistema de numeració*. És interessant perquè és *posicional en base* 20, però adequat a l'any solar.

Després ens porta a Egipte. La matemàtica egípcia és molt interessant. Els algorismes de multiplicar i dividir es basen en la possibilitat d'escriure qualsevol nombre natural de forma única en base 2. El *mètode fraccionari* egipci és molt particular. Les úniques fraccions existents son les *fraccions unitàries*, és a dir, les fraccions de la forma $\frac{1}{n}$. Permeten resoldre els problemes d'àlgebra de primer grau amb força generalitat. Hi trobem ja el *mètode de falsa posició*, que s'havia atribuït a l'àlgebra àrab. Les fonts d'informació que usa l'autor són el papir d'Ahmes o papir Rhind, i els papirs de Berlin, de Kahun, de Reisner, i de Moscou, i també el rotlle de cuir de la matemàtica egípcia. En l'àmbit de l'aritmètica hi trobem ja certes progressions aritmètiques i geomètriques, que posen de manifest que sabien sumar els termes de cada una d'elles. El problema 64 del papir Rhind, diu: «Dividir 10 hekats de cibada entre 10 homes de manera que la diferència comuna sigui d'un octau de hekat de cibada». És molt interessant veure com aconsegueix resoldre'l l'escrivà. Finalment JOSEPH ens presenta els dos resultats més notables de la geometria egípcia.

Un és el valor que el papir Rhind [2.000–1.800 aC] atribueix a la relació entre el radi al quadrat i la superfície del cercle,

$$4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2,$$

i l'altre l'algorisme correcte per trobar el volum d'un tronc de piràmide de bases quadrades del papir de Moscou, que és de la mateixa època que el papir Rhind. Bell ho considera «la més

gran piràmide egípcia». Caldrà esperar fins a HERÓ D'ALEXANDRIA [segle I dC] per retrobar aquesta expressió. Finalment, amb el problema 10 del papir de Moscou, l'autor posa de manifest l'ambigüitat que comporten, a vegades, les solucions que es donen.

Seguint aquest passeig per la matemàtica del Pròxim Orient ens traslladem a Babilònia, on trobem l'escriptura cuneïforme. El sistema de notació numèrica és ben sorprenent, sobretot si atenem a la seva antiguitat [$\sim$ 3.000 aC]. És un sistema de numeració *posicional*, en base 60, però que s'expressa usant nomes dos símbols: l'un —el clau— per a les unitats i l'altre —l'espiga— per a les desenes. És un sistema d'una riquesa increïble. Es basa en taules de multiplicar, i d'inversos, atès que dividir equival a multiplicar per l'invers. El fet de treballar amb base 60 permet una inversió molt bona. Aquest sistema es manté a l'*Almagest* de PTOLEMEU, a les taules alfonsines, de finals del segle XII, preparades a partir de taules àrabs, per ordre expressa d'ALFONS X, el Savi. Encara AL-KASHI, quan al segle XIV dóna el valor aproximat de 2π, l'expressa de la forma següent:

$$6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 15, 50,$$

on el signe ";" separa la part entera de la part decimal, i cada una de les "," separa, expressats en símbols actuals, els decimals en base 60.

La matemàtica babilònica és d'una gran riquesa i molt superior a l'egípcia. Coneixien ja el teorema de Pitàgores, com demostra una tauleta de la Universitat de Yale, molt original, i també la Plimpton 322. En aquesta darrera, hi trobem les secants al quadrat dels angles que van des de 45° a 30°, baixant de grau en grau, però calculats en triangles rectangles pitagòrics, és a dir, triangles rectangles de costats enters tals que, a més, el catet sigui invertible. JOSEPH l'anomena una «prototrigonometria». Un altre resultat notable és l'algorisme de resolució de les equacions de segon grau. Tothom està d'acord a creure que l'havien obtingut del problema geomètric següent: «trobar els costats d'un rectangle d'àrea donada del qual es coneix la suma [o la diferència] dels costats». Suposem, per exemple, que la suma val a i el producte A. Aleshores resolien el problema mitjançant la fórmula

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4A.$$

Aquests coneixements els permetien resoldre, amb àlgebra, alguns problemes geomètrics. També sabien resoldre sistemes d'equacions de primer i de segon grau amb dues i tres incògnites. Coneixien el teorema de Tales. S'han trobat taules que permeten resoldre, en nombres enters, certes equacions cúbiques de la forma $x^3 + x^2 = a$. Però potser el problema més sorprenent de tots és el que demana «el temps que trigarà una quantitat de diners a doblar-se a interès compost del 0;12 (és a dir al 20%)?». La resposta s'obté per interpolació lineal, i és la primera vegada que trobem el càlcul d'un exponent.

La matemàtica xinesa encara és molt més desconeguda a Occident. JOSEPH ens porta agafats de la mà pel *sistema de numeració dels pals*, un sistema de numeració en base 10, pseudoposicional, que només fa servir dos símbols: "–","|". Molt vinculat a l'àbac, permet efectuar els algorismes de sumar, restar, multiplicar, dividir, i treure arrels quadrades i cúbiques de forma anàloga a l'actual. També ens ensenya que coneixien els nombres fraccionaris, amb els quals operaven com fem nosaltres. El maneig algèbric —*mètode de falsa posició* i *mètode de doble falsa posició*— els permet usar la diferència amb una gran naturalitat. Un dels resultats realment sorprenents és que fan servir *matrius* i un algorisme que recorda el *mètode de Gauss* per resoldre sistemes d'equacions lineals amb vàries incògnites. Sabem també que coneixien gairebé totes les fórmules de càlcul d'àrees i volums dels sòlids geomètrics usuals.

Un fet característic de la matemàtica xinesa és un coneixement força avançat dels *quadrats màgics*. En trobem d'ordre 4, d'ordre 5 i d'ordre 7, i un algorisme per calcular-los. Coneixien també perfectament el teorema de Pitàgores i l'usaven per resoldre els problemes del bambú trencat. Esmentem que LIU HUI [260] fa servir un mètode d'exhaució —semblant al d'Arquimedes, però més simple— per aproximar el nombre π. Els seus deixebles van arribar a usar polígons regulars de 24.576 costats i van ser els primers a trobar l'aproximació senzilla i acurada $\pi = \dfrac{355}{113}$. Indiquem, per acabar, les troballes més remarcables de la matemàtica xinesa: els *nombres combinatoris* i el *triangle aritmètic*, el *mètode de Horner*

per resoldre equacions polinòmiques de forma aproximada, i el famós *teorema xinès del romanent*.

Des de la Xina l'autor del llibre ens porta cap a l'Índia, on la riquesa de la matemàtica és també molt notable. Va des de la matemàtica religiosa dels *Sulbasutres*, que té com a objectiu determinar la forma dels altars i la seva superfície, segons el Déu al qual estava dedicat i segons el que es volia obtenir, fins al càlcul geomètric de π i de les arrels quadrades. De la matemàtica índia no podem oblidar el *sistema de numeració indi*, posicional amb zero, en base 10. Usa deu xifres, i és el que van adoptar els matemàtics de l'islam i que finalment es va imposar a Occident, bandejant definitivament els àbacs com a sistema de càlcul. Voler fer ara una síntesi de tota la matemàtica índia és potser excessiu. Recordem, per exemple, que el *text Bakhshali* conté un sistema simbòlic per a l'àlgebra molt curiós i evolucionat; que coneixien perfectament la *combinatòria* i els *nombres combinatoris*, mètodes d'extracció d'arrels quadrades, i d'altres qüestions que ja hem trobat en d'altres pobles. Com a coneixements particulars cal destacar que sabien resoldre l'equació de primer grau $ax + by = c$, i molt més seriós encara, les *equacions de Pell*:

$$ax^2 \pm c = y^2, ax^2 + 1 = y^2.$$

Van introduir, sense cap mena de dubte, la trigonometria com una ciència matemàtica independent de l'astronomia, van calcular taules trigonomètriques d'una exactitud enorme, i van establir fórmules que relacionaven les raons trigonomètriques. Al segle XVI, MADHAVA va trobar el desenvolupament en sèrie de l'arc tangent; és a dir, la *sèrie de Gregory*, que li va permetre determinar el valor aproximat següent:

$$\pi = 3,14159265359.$$

També van trobar els desenvolupaments en sèrie de les funcions sinus i cosinus, avantçantse a NEWTON.

Totes aquestes troballes van ser assimilades pels matemàtics de l'islam que van portar a Occident l'àlgebra i la trigonometria. Van criticar el concepte d'*irracional* grec, i van proposar una aproximació geomètrica equivalent a la representació en *fracció contínua*, a través de l'aplicació de l'algorisme d'Euclides entre quantitats no commensurables. Van introduir els nombres decimals en el sistema decimal indi; trobaren una expressió per calcular *nombres amics*; desenvoluparen moltíssim l'àlgebra, tot aplicant-la amb una gran naturalitat a la resolució de problemes, inclosos els geomètrics; els preocupava la resolució de la cúbica. 'UMAR KHAYYAM, el poeta, l'algebrista, va donar la resolució geomètrica de les cúbiques. Dissortadament no va encertar amb l'expressió algorísmica. AL-KASHI aplicà el *mètode iteratiu* a la resolució de la cúbica

$$x^3 - 0,75x + 0,013083989 = 0$$

per tal de fabricar una taula trigonomètrica.

El text de JOSEPH és certament un text d'història de la matemàtica, però és un d'aquells textos que no solament ens diu que és el què es va fer, sinó que ens mostra com es va fer. És un text ric en continguts, però senzill en l'exposició. És molt clar. Penso, com ja he indicat, que és un text adequat per a l'ensenyament secundari perquè conté moltes de les qüestions que s'aprenen en aquesta etapa de la formació.

Per acabar voldria fer notar l'enorme diferència que hi ha entre la manera de fer matemàtica oriental i la manera de fer matemàtica grega. A Grècia el que importa és el rigor. Tot s'ha d'establir segons a uns fonaments sòlids. El càlcul és totalment secundari. No disposen d'un sistema de numeració gaire àgil i la logística es fa usant àbacs. En canvi, a la matemàtica oriental el que l'importa és el càlcul, el joc amb les quantitats concretes. Això fa que, en aquesta matemàtica, els sistemes de numeració siguin molt elaborats i disposin d'algorismes realment útils. En canvi, la geometria, a diferència de Grècia, és una part de l'àlgebra o del càlcul amb nombres enters, fraccionaris o irracionals. Serà la simbiosi d'aquestes dues cultures i de dues formes de pensar —la grega i l'oriental transmeses pels matemàtics islàmics— el que, a partir del segle XIV, transformarà Occident. Els grans astrònoms disposaran de mitjans teòrics, però també d'eines de càlcul prou potents per poder establir les primeres lleis de la naturalesa, a partir de les dades observacionals. D'aquestes al càlcul diferencial i integral hi ha un pas.

El realisme en les matemàtiques

Realism in mathematics
PENELOPE MADDY. Oxford University Press, London, 1993, ix + 204 p.

Article de MORRIS W. HIRSCH
University of California, Berkeley
BULLETIN (new series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volum 32. Número 1. Gener de 1995

Traducció d'ANTONI GOMÀ
IES Joanot Martorell, Esplugues

1. El realisme en les matemàtiques

> Les matemàtiques sempre han vorejat perillosament les platges de la metafísica. [S. G. SHANKE.]

> Des del moment en què les proposicions de les matemàtiques es refereixen a la realitat, ja no són certes; i des del moment en què són certes, no es refereixen a la realitat. [EINSTEIN.]

> La realitat és solament un altre model. [*D'un grafit. Evans Hall, Berkeley.*]

Quan treballem com a matemàtics, dediquem poc temps a treure conclusions filosòfiques. Ens estimem més tirar endavant la feina que no pas malgastar el nostre temps especulant sobre el que significa. Tanmateix, no és ben cert que cadascun de nosaltres, en algun moment, ha desitjat saber exactament —encara que només sigui per rebutjar la pregunta com a una cosa sense sentit o massa difícil— què són les matemàtiques?

Què són els nombres? Què és la veritat matemàtica? En quin sentit podem dir que existeix el número 3, o bé π, o bé $2^{\aleph_0}$? Si no hi hagués vida a l'univers, existirien els nombres? Encara seria vàlid el teorema dels nombres primers? Podem dir definitivament que la hipòtesi del continu és certa o bé falsa?

Penelope Maddy, professora de filosofia a la Universitat de Califòrnia, a Irvine, diu en la seva introducció:

> Tot i que els matemàtics tenen a l'abast un ampli ventall de veritats matemàtiques allunyades de la majoria de la gent, sovint a l'hora d'explicar la natura d'aquestes veritats tendeixen a emprar el sentit comú immaculat. Es veuen a ells mateixos i als seus collegues com a investigadors que descobreixen les propietats de diversos i fascinants compartiments de la realitat matemàtica: els afeccionats a la teoria de nombres estudien els enters, els geòmetres estudien determinats espais, els teòrics dels grups estudien els grups, els teòrics dels conjunts estudien els conjunts, i així successivament.

Maddy fa referència a aquesta actitud de sentit comú com a «realisme prefilosòfic»: les matemàtiques com a ciència tracten amb certes entitats —nombres, conjunts, funcions, etcètera— que realment existeixen, de la mateixa manera que les ciències físiques estudien els objectes físics habituals; i per tant, com que les proposicions matemàtiques parlen de la realitat, es pot decidir si són certes o falses.

El problema amb aquesta actitud planera, com constata Maddy, és que intenta explicar-se tot endinsant-se en camins perillosos. Què són i on són aquests objectes abstractes? Si, com diu Plató, no es poden situar ni en l'espai ni en el temps, llavors, com podem saber-ne res?

Quan s'enfronten amb aquests trencaclosques filosòfics, molts matemàtics es reclouen en un formalisme nihilista —«només ens dediquem a jocs sense cap significat amb símbols buits de contingut»— però cap de nosaltres s'ho creu realment.

Aquesta «doble-visió» no provoca preocupacions entre els matemàtics, però un filòsof no la pot pas acceptar. L'objectiu de Maddy és «desenvolupar i defensar una versió de l'actitud 'prefilosòfica' dels matemàtics». El propòsit del llibre que comentem és justificar el realisme matemàtic.

El *platonisme* creu en l'existència objectiva de les entitats matemàtiques. Però la posició de Maddy resta allunyada del platonisme en el seu sentit estricte, és a dir, que els objectes matemàtics són formes ideals fora de l'espai físic i del temps, eterns i invariables, i que les veritats matemàtiques són *a priori* certes i necessàries. Ben al contrari, ella justifica l'existència objectiva dels conceptes matemàtics en l'íntima rela-

ció entre les matemàtiques i les altres ciències: atès que la física treballa sobre coses reals i les matemàtiques són imprescindibles per al desenvolupament de la física, es desprèn que les matemàtiques també treballen sobre coses reals. I, encara més: assolim el coneixement de la realitat matemàtica, per exemple dels conjunts, directament amb les nostres neurones.

2. El realisme científic

> Entia non sunt multiplicanda prater necessitatem.[5] [GUILLEM D'OCCAM]

Després de tenir serioses discussions amb el formalisme, el logicisme i el convencionalisme i passar per alt l'intuïcionisme, perquè «la tasca del filòsof de les matemàtiques és descriure i explicar matemàtiques, no reformarles», Maddy adopta el realisme matemàtic. Per justificar-lo es basa en el *realisme científic* de W. V. O. Quine i la seva epistemologia naturalista. Com justifiquem la nostra fe en l'existència d'objectes esotèrics i no observables, com és ara quarks o electrons o la temperatura de Plutó? Com és que creiem en l'existència objectiva dels objectes físics? Perquè aitals suposicions formen part de la ciència, que és la millor manera que tenim d'entendre el món físic i «formar part de la nostra millor teoria és la millor justificació que podem tenir per estar convençuts d'una cosa... quina millor justificació podríem trobar per creure en les afirmacions més *ben confirmades* de la nostra millor teoria científica que el fet que realment *són* les afirmacions més *ben confirmades* de la nostra millor teoria científica?»

Tanmateix, fins i tot si acceptem el realisme científic per passar d'aquí a justificar el realisme matemàtic fa falta un lligam entre la ciència física i les matemàtiques. En aquest punt Maddy manlleva de Quine i Hilary Putnam un argument d'«indispensabilitat»: com que la ciència és inconcebible sense les matemàtiques, «estem sotmesos a l'existència dels objectes matemàtics perquè són indispensables per desenvolupar la nostra millor teoria sobre l'univers i estem convençuts que volem acceptar aquesta teoria».

Maddy indica que el platonisme implícit en l'argument d'indispensabilitat de Quine/Putnam és força diferent del de Plató. Si bé Plató considera *a priori* que el coneixement matemàtic és evident i necessari, el punt de vista de Quine/Putnam no porta pas a aquestes conclusions: Si les matemàtiques són objectives perquè estan encaixades en la teoria científica, difícilment poden ser considerades *a priori*; i això dóna poc suport a l'evidència o a la necessitat.

Ara bé, un problema més seriós és que l'argument de Quine/Putnam s'aplica únicament a la part de les matemàtiques que s'empra en altres ciències; no diu res sobre les «matemàtiques no aplicades», aquelles que no semblen a primera vista indispensables per a la física. Quine accepta com a objectiva «només aquella part de les matemàtiques que cal per al desenvolupament de les ciències empíriques», juntament amb coses com és ara «ramificacions transfinites» que «apareixen quan es va per una drecera». Tanmateix, l'actitud dels matemàtics, diu Maddy, «no és pas la de pensar que trobaran la justificació de les seves preocupacions en l'activitat dels laboratoris». Tenim les nostres pròpies maneres de justificar els nostres mètodes i les conclusions que traiem, incloses les demostracions, l'evidència intuïtiva, els arguments de plausibilitat i les defenses d'altres arguments en termes de les seves conseqüències.

Més endavant, Maddy objecta que les matemàtiques jutificades per Quine/Putnam només consideren la teorització científica en aquells nivells teòrics que els convenen. No necessitem pas la física per justificar que «2 + 2 = 4» o bé que «la unió del conjunt dels nombres parells amb el conjunt dels nombres senars és el conjunt de tots els nombres». Tal com diu Charles Parson, la doctrina de Quine/Putnam «deixa sense explicació precisament *l'obvietat* de les matemàtiques elementals».

En aquest punt Maddy demana ajuda a Kurt Gödel; segons aquest els axiomes més elementals de la teoria de conjunts «ens forcen per si mateixos a creure que són correctes». Citem Gödel:

> La lògica i les matemàtiques (exactament igual que la física) es basen en axiomes amb contingut real que no poden ser «explicats des de fora»... Tant justificades com podem trobar les hipòtesis d'existència dels cossos físics ho poden ser les

[5] En llatí a l'original.

> suposicions [sobre conjunts] i d'aquí es desprenen raons suficients per creure en la seva existència. Els conjunts són necessaris per a obtenir un marc de treball satisfactori per a les matemàtiques en el mateix sentit que els cossos físics són necessaris per a una teoria satisfactòria sobre les percepcions dels nostres sentits.

Ara bé, Gödel objectivava àdhuc les veritats matemàtiques no intuïtives, semblantment a les assercions de la física sobre objectes no observables. Pel que fa a la manera com es pot justificar un nou axioma, postulava que fins i tot en cas que ja hagin perdut tot punt d'intuïtivitat, podem decidir acceptar-los com a vàlids per les mateixes raons que acceptem una teoria física *ben establerta*: perquè serveixen per a demostrar conseqüències comprovables, obtenir nous resultats i il·luminar-ne de vells.

Combinant les idees de Quine/Putnam i Gödel, Maddy arriba al *platonisme de compromís:*

> Aquest compromís adopta del punt de vista de Quine/Putnam el paper central dels arguments d'indispensabilitat; de Gödel pren el reconeixement de les formes purament matemàtiques d'evidència i la responsabilitat d'explicar-les. D'aquesta manera esquiva el punt més difícil d'acceptar de Quine/Putnam —la seva falta de fe en la pràctica matemàtica— i també la màxima dificultat del gödelisme —la seva manca d'argument potent per la veritat de les matemàtiques.

Tanmateix, encara hi ha una anella de la cadena perduda. Si la « intuïció matemàtica» ha de ser la base d'una epistemologia de les matemàtiques, com la percepció ho és per a la física, en necessitem una teoria. És ben cert que coneixem un munt de coses pel que fa als orígens biològics de les nostres capacitats de percepció —però d'on vé la intuïció matemàtica?

3. Las bases neurològiques de la intuïció matemàtica

> La intuïció implica el fet de copsar la intenció o el sentit o l'estructura d'un problema sense intervenció explícita de l'aparell analític que cadascú pot fer servir. És la intuïció la que planteja ràpidament hipòtesis i la que provoca interessants confrontacions d'idees abans de saber la seva vàlua. Precedeix la demostració; evidentment, és allò que en les tècniques d'anàlisi i demostració es coneix com a prova i error. [J. S. BRUNER]

> Després de tot, una teoria matemàtica que ha esdevingut la base d'un sistema científic potent i reeixit, que inclou un gran nombre d'observacions empíriques importants, no s'ha d'acceptar pas **únicament** pel fet que sigui «intuïtiva»... [HILARY PUTNAM]

El segon dels cinc capítols del llibre és «Percepció i intuïció». La pregunta principal és aquesta: si per al platonisme tradicional els objectes matemàtics són abstractes, llavors, com ens és possible arribar a saber-ne res? En aquest punt es canvia l'aspecte del problema des de l'ontologia —quines entitats matemàtiques existeixen?— a l'epistemologia —com podem arribar a establir les veritats matemàtiques?. «El platonista encara ens deu una explicació de com i per què les opinions de Solovay sobre conjunts són indicadors fidedignes del que veritablement són els conjunts.»

Maddy cita el nominalista[6] Hartry Field, que nega que les matemàtiques siguin indispensables per a la física. D'acord amb el platonisme estricte, les entitats matemàtiques no tenen cap relació espacio-temporal ni cap contacte físic amb nosaltres ni amb cap objecte que poguem observar; són autosuficients pel que fa al significat i al llenguatge. Essent així, pregunta Field, com és que «les nostres intuïcions poden reflectir tan bé la realitat sobre aquestes entitats remotes?... *En principi sembla impossible explicar això,* i per tant es tendeix a *boicotejar* la fe en les entitats matemàtiques *malgrat* qualsevol raó que poguem tenir per creure-hi...»

En comptes de la caracterització «sense paraules» dels objectes matemàtics que aporta el platonisme estricte, Maddy promet «portar-los al món que coneixem i en contacte amb el nostre habitual aparell cognitiu».

Segueix una llarga digressió sobre filosofia, psicologia i neurologia de la percepció, adreçada a justificar la seva proposició principal, a saber, que «podem percebre i percebem conjunts; la nostra habilitat per fer-ho es desenvolupa pràcticament de la mateixa manera que la que ens porta a percebre els objectes físics». Com a fonament fisiològic de la percepció, Maddy es refia totalment de les especulacions neurològi-

[6] Un nominalista no creu en l'existència objectiva de les entitats matemàtiques.

ques de D. Hebb en el seu llibre *L'organització del comportament* [1949]. Hebb suggereix que l'aprenentatge, la memòria, el reconeixement de models i d'altres tasques cognitives s'assoleixen mitjançant una modificació de l'estructura del sistema nerviós. En un passatge prou conegut, afirma:

> Quan l'àxon d'una cèl·lula A està suficientment a prop per a excitar una cèl·lula B i repetidament o persistent li envia descàrregues, es produeix un procés d'increment del canvi metabòlic en una o en ambues cèl·lules de manera que augmenta l'eficiència d'A, pel fet de ser una de les cèl·lules que activava B.

Hebb suggereix que en resulta la formació d'una *assemblea de cèl·lules*, un conjunt de neurones interconnectat i autoenfortit. Per la seva capacitat a respondre eficaçment en el futur als mateixos estímuls que han provocat originàriament la seva formació, l'assemblea de cèl·lules constitueix una representació en el sistema nerviós d'una part del món exterior. Les percepcions complexes i les reflexions corresponen a —o, simplement, *són*— l'activitat simultània de les assemblees multicel·lulars.

Hebb també suggereix que les assemblees cel·lulars s'organitzen en agrupacions d'ordre superior. Maddy proposa que en el nostre sistema nerviós hi ha assemblees cel·lulars d'ordre superior que corresponen a conjunts particulars mentre que una agrupació d'un ordre molt més elevat correspon a la nostra noció general de conjunt:

> Aquesta estructura cel·lular a la qual correspon la idea general de conjunt és, llavors, la responsable de les diverses idees intuïtives sobre conjunts, per exemple, que en ells podem trobar-hi les propietats dels nombres, el fet que aquestes propietats numèriques no canvien quan els elements són modificats ... I aquestes intuïcions són subjacents als axiomes bàsics de la nostra teoria científica de conjunts.

Aquests són els fonaments epistemològics del «realisme de la teoria de conjunts» que proposa Maddy. D'acord amb aquest punt de vista, els nostres conceptes i convenciments sobre conjunts no provenen pas de les formes ideals de Plató per alguna via que no podem comprendre, sinó que resulten d'alguns esdeveniments físics —canvis en les sinapsis i el desenvolupament de dreceres en el sistema nerviós. Ella suggereix consideracions anàlogues pel que fa a rectes, corbes i d'altres estructures geomètriques.

4. Els nombres

> Em sembla que els nombres enters tenen existència real fora de nosaltres i això se'ns imposa amb la mateixa necessitat predeterminada que el sodi o el potasi. [C.HERMITE]

> Què és un nombre, que un home pot saber-ho, i què és un home, que pot saber què és un nombre? [WARREN MCCULLOCH]

En el capítol 3, Maddy para atenció en els nombres. És habitual en els tractaments formals de la teoria de conjunts identificar els nombres amb determinats conjunts. Així, Zermelo identifica els nombres naturals amb la successió 0, 0,0, ..., i von Neumann els presenta com 0, 0, 0, 0, ... És que no hi pot haver una altra manera que poguem preferir? Tal vegada no és possible amb finalitats matemàtiques. Però si no hi ha una elecció natural, llavors cap elecció podrà oferir una fonamentació filosòfica satisfactòria per al concepte de nombre. Per exemple, les dues successions tenen propietats diferents des del punt de vista teòrico conjuntista: cadascun dels nombres de Zermelo excepte el primer és un singletó[7] i no és pas així per a von Neumann. Es pot objectar que aitals propietats d'aquestes successions són supèrflues —això és, precisament, el problema filosòfic: com és que els nombres poden tenir propietats supèrflues? Algunes consideracions del mateix caire suggereixen que, de fet, tampoc no caldrà identificar els nombres reals amb conjunts.

Aquest argument, propi de Benecerraf, tendeix darrerament a dir no solament que els nombres no són conjunts, sinó que no són *objectes* de cap tipus, justament perquè els objectes perden la universalitat que els nombres han de tenir.

Frege considera que els nombres són conceptes, però Maddy hi argumenta en contra. I així, mentre Cantor pensa que els nombres naturals són entitats diferenciades, a partir d'una «abstracció» dels conjunts, i Dedekind diu que els nombres reals s'«associen» a tallaments, Maddy els objecta que no expliquen aquests processos d'abstracció o d'associació.

[7] mot no inclòs al diccionari de l'IEC però sí al de l'Enciclopèdia.

Tanmateix, el realisme necessita que els nombres *siguin quelcom*. La solució de Maddy és que *els nombres són propietats dels conjunts*. Així com la massa, per exemple, és una de les propietats dels cossos que s'estudia en física, el «nombre» és una de les propietats dels conjunts que s'estudia en matemàtiques. De la mateixa manera que els objectes físics són comparables en termes de la massa, així els conjunts són comparables en termes de nombres:

> Els ordinals de von Neumann són únicament un instrument de mesura mitjançant el qual podem comparar els conjunts pel que fa a la mida numèrica. Aprenem coses dels nombres mentre aprenem coses dels ordinals de von Neumann perquè aquests formen una successió canònica que exemplifica les propietats que tenen els nombres. La tria entre els ordinals de von Neumann i els de Zermelo no és res més que l'elecció d'un regle o un altre de diferent, en el ben entès que tots dos mesuren en metres.

Si els nombres naturals són propietats dels conjunts, què són els nombres reals? La resposta de Maddy no és tan perspícua. Primer de tot ella assegura que la pregunta *Què són els nombres reals* no és tan anàloga a *Què són els nombres naturals* com podria semblar a primera vista. I ho diu perquè així com els dos models comentats dels nombres naturals tenen diferents propietats teòrico conjuntistes, ni que siguin supèrflues,

> hi ha una única propietat subjacent a totes les diferents presentacions dels reals mitjançant conjunts teòrics, una única propietat compartida pels aparells particulars de mesura, per diversos que siguin, a saber, la continuïtat. És així que si hi ha una resposta escaient a «què són els reals»... llavors la resposta escaient és: els nombres reals *són* la propietat de continuïtat.

Hem d'admetre que «això sona estrany» i força diferent a la conclusió que els nombres naturals són propietats dels conjunts. L'arrel de la diferència rau en el fet que tots tenim força intuïcions bàsiques sobre els naturals, que precedeixen, de bon tros, les presentacions formals que se'n fan. Unes intuïcions anàlogues sobre els reals no les tenim, però sí que les tenim pel que fa a la *continuïtat*, que és el concepte que cal que s'expliqui. Això ja sembla més clar, però, tanmateix l'*statu quo* ontològic dels nombres reals es deixa una mica fosc.

Aquest capítol inclou una discussió sobre *propietats*, una categoria intermèdia que està situada «en algun lloc entre els predicats —individualitzats per la identitat de significats— i els conjunts —individualitzats per la identitat dels seus elements...» El capítol conclou amb reflexions sobre els nombres de Frege, que són «col·leccions que no són conjunts» i sobre la distinció entre conjunts i classes. Si bé aquestes idees no són necessàries per al desenvolupament que fa Maddy de la doctrina del realisme matemàtic, sí que són rellevants de cara a les seves consideracions històriques sobre la teoria de conjunts que es fa en el capítol següent.

5. Els axiomes

> L'axiomatització i l'algebrització de les matemàtiques, des de fa més de cinquanta anys, ha portat a la il·legibilitat d'una quantitat tan gran de textos matemàtics que ja pesa sobre nosaltres l'amenaça d'una pèrdua total del contacte amb la física i les ciències naturals. [V. I. ARNOLD]

> Totes aquestes argumentacions sobre els infinits no són res més que l'ambició dels escolars. [THOMAS HOBBES]

El platonisme gödelià es sustenta en dos principis. En el capítol 3, Maddy explora el primer, que la realitat de les matemàtiques elementals es justifica mitjançant la nostra intuïció matemàtica. En el capítol 4 tracta del segon: la justificació dels axiomes menys intuïtius pel seu poder explicatiu.

Abans d'atacar l'axiomàtica, ella descriu breument el problema matemàtic que va conduir Cantor cap a la teoria de conjunts: la descripció del conjunt de punts de la recta en què una sèrie de Fourier no convergeix. Això la va portar a estudiar la correspondència de Cantor amb Dedekind i a les jerarquies teòrico conjuntistes de Borel, Lebesgue, Baire, Luzin i Suslin. Llegint-ho, veiem clarament com els problemes matemàtics van menar cap a l'axiomàtica.

Després de preparar l'escenari històric, Maddy comença amb la controvèrsia sobre l'axioma de l'elecció que va esclatar durant la primera dècada d'aquest segle i l'enfoca des de la perspectiva del platonisme de compromís:

> La millor teoria de què disposem per explicar el món necessita l'aritmètica i l'anàlisi, i a les nostres millors teories aritmètiques i de

l'anàlisi els cal la teoria de conjunts incorporant-hi, si més no, l'axioma d'elecció dependent. Més enllà d'aquest Quine/Putnanisme pur, el compromís platonista troba el tipus d'arguments intra-matemàtics que Gödel anticipava.

Molts matemàtics justificaven l'axioma de l'elecció perquè les matemàtiques el necessitaven i simplificava moltes demostracions. Maddy ironitza amb el fet que Baire, Borel i Lebesgue, fervents opositors del nou axioma, l'han emprat de diverses formes, potser sense voler. De tota manera el seu treball va deixar obert el camí cap a l'argument d'indispensabilitat de l'elecció formulat per Zermelo.

L'enfurismat debat sobre la legitimitat de l'elecció tenia a veure amb un conflicte entre dues concepcions diferents de què és un conjunt. Per una banda hi havia l'aproximació logicista de Frege, fonamentada en l'extensió d'un concepte i en la divisió d'un tot en grups com a conseqüència d'una regla del tipus que sigui. Per l'altra, l'aproximació matemàtica de Cantor, per mitjà de la qual es formen nous conjunts a partir d'altres ja existents d'acord amb procediments definits, que culminen en la jerarquia iterativa de conjunts de Zermelo. En podem dir, respectivament, l'aproximació «del cim cap avall» i la «del fons cap amunt». Baire, Borel i Lebesgue, desconfiats davant de correspondències arbitràries entre conjunts, es van decidir per l'aproximació de baix cap a dalt per analitzar les funcions.

Maddy cita un seguit de cartes entre aquests tres matemàtics i el seu oponent, Hadamard. L'any 1905, després que Zermelo va fer servir l'axioma de l'elecció per a demostrar el principi de bona ordenació, Lebesgue va escriure a Hadamard:

> La qüestió ens porta a aquesta altra, que és sorprenentment nova: *Es pot provar l'existència d'un objecte matemàtic sense definir-lo?...* Crec que només podem estructurar sòlidament [les matemàtiques] *si admetem que és del tot impossible demostrar l'existència d'un objecte sense definir-lo.*

Qui pot posar objeccions a aquest principi tan raonable? Hadamard va poder! Tot i admetre que Zermelo no tenia manera de realitzar l'aplicació que es necessita per a una funció d'elecció, va insistir que el problema de la seva determinació efectiva és completament diferent de la qüestió de la seva existència: «L'existència... és un fet com qualsevol altre.» Avui dia aquesta opinió de Hadamard s'ha fet extensiva a una àmplia majoria de matemàtics.

Seguidament en aquest capítol s'inclou una discussió d'alguns problemes oberts de la teoria de conjunts, com és ara la hipòtesi del continu (que Cantor acceptava però en canvi Gödel, no). Maddy examina el panorama que ofereixen aquests problemes a algunes «teories enfrontades», obtingudes afegint diversos nous axiomes al sistema estàndard.

Després d'una discussió bastant tècnica d'allò que és demostrable i sota quins axiomes, hi ha un comentari prou interessant de per què el Realisme de Compromís ha portat l'autora a «estar-se d'atribuir la qualitat d'intuïtives» a certes motivacions que van servir com a justificació de l'axioma dels cardinals transfinits: La raó, diu Maddy, és «perquè em sembla que van més enllà del que es pot demanar de manera plausible a un fonament neurològic subjacent...»

Després de fer una ullada a alguns dels nous sistemes d'axiomes de la teoria de conjunts i constatar que no poden pas ser tots correctes perquè menen a determinacions oposades sobre la hipòtesis del continu, Maddy es col·loca en la tesitura de decidir quin d'ells és més versemblable que sigui correcte. Tanmateix aquesta no és pas una qüestió que pugui concloure amb una prova formal perquè, de fet, el veritable problema és decidir en quins axiomes volem basar les nostres demostracions. I, per altra banda, no ens podem mantenir en la vella idea que només acceptarem els axiomes que «es veuen com a evidents», perquè fins i tot els axiomes acceptats de ZFE (teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel amb l'axioma de l'elecció) «no frueixen d'aquest estatus»:

> Es pot dir clarament que necessitem un nou balanç pel que fa al nostre coneixement dels axiomes i al paper dels arguments matemàtics no demostratius per aportar evidències...
> Però abans de poder respondre la pregunta de quin candidat a axioma se sustenta millor amb aquests arguments, hem d'aclarir la qüestió prioritària de si aquests arguments tenen pes per ells mateixos i, si és així, per què. Cal que expliquem com, per què i fins a on podem fer servir aquests arguments com a evidència per a la veritat de les nostres conclusions. Només llavors podrem determinar quins d'entre aquests axiomes aporten una evidència més nítida.

En el darrer capítol es torna a plantejar la defensa del realisme teòrico conjuntista, citant i contestant alguns atacts dels nominalistes H. Field i C. Chiara i comparant el platonisme de l'autora amb el monisme, el fisicalisme i l'estructuralisme. L'autora mostra que aquestes filosofies enfrontades comparteixen amb el realisme matemàtic el problema d'avaluar les reivindicacions de diferents sistemes d'axiomes per mètodes no demostratius.

Finalment l'autora incorpora un sumari admirablement clar i succint dels seus punts de vista.

6. La veritat matemàtica

> Jo crec que hi ha exactament 15, 747, 724, 136, 275, 002, 577, 605, 653, 961, 181, 555, 468, 044, 717, 914, 527, 116, 709, 366, 231, 425, 076, 185, 631, 031, 296 protons a l'univers. I el mateix nombre d'electrons. [Sir ARTHUR EDDINGTON]

Tothom pot esperar d'un llibre del tipus que comentem que miri de resoldre el problema de la veritat matemàtica: cada proposició matemàtica que es pugui formular ha de tenir un valor de veritat? En cas afirmatiu, què vol dir que una proposició matemàtica, per la qual habitualment no existeix una demostració, és «certa»?

A no ser que d'alguna manera enllacem les abstraccions matemàtiques al món físic, aquestes preguntes es poden respondre només com a actes de fe. Però per al realisme matemàtic, la veritat matemàtica no ofereix especials problemes: les matemàtiques es refereixen a coses que «existeixen i són com són independentment de la nostra capacitat per saber com són». Una proposició matemàtica, per exemple sobre els nombres reals, és o certa o falsa, i la nostra feina és descobrir-ho —però el fet que reeixim o no en la nostra tasca no afecta pas el seu valor de veritat. Una proposició matemàtica és certa si i només si es correspon correctament amb la realitat matemàtica, i això és tot el hi ha. No és pas que el problema de la veritat matemàtica no existeixi sinó que l'hem de considerar com a part d'una qüestió filosòfica més àmplia: quines proposicions són certes?

D'acord amb el realisme conjuntista podem establir un fet en alguna matèria, per exemple sobre la hipòtesi del continu: o bé és certa o bé és falsa. Com que la intuïció no ens ajuda gaire, la tasca del realista és cercar algun sistema d'axiomes que porti a que sigui certa.

Tanmateix hi ha una altra consideració que no es planteja en aquest llibre. Una proposició que avui dia sembla plena de sentit pot ser que esdevingui, gràcies als avenços científics, impossible de contestar en principi (i, doncs, científicament sense sentit) o que es vegi que es basa en suposicions falses sobre la realitat, o, simplement, que sigui irrellevant. Si se segueix per aquest camí, desapareixen tots els programes de recerca.

Això ha passat sovint en moltes branques de la ciència. Fa un segle la qüestio més important en biologia era descobrir la natura de la força viva; en física, descobrir la natura de l'èter. Certament també pot decaure properament el sentit de preguntar-se quina és la posició simultània i el moment d'un electró o bé sobre esdeveniments simultanis en galàxies distants o bé intentar precisar el radi de l'electró. En un cert moment la ciència més avançada deia que hi havia cinc planetes, després van ser sis,... De vegades succeeix el contrari, com quan l'obsoleta meravella de la transmutació dels elements que cercaven els alquimistes va ser realitzada per una reacció radioactiva en cadena.

Quelcom similar ha succeït en matemàtiques:

- Abans de Pitàgores hi havia una veritat matemàtica que afirmava que qualsevol fracció és racional.
- S'ha canviat el valor de veritat que tenia el cinquè postulat d'Euclides al llarg de molts segles, atès que fins no fa gaire la geometria no era simplement un estudi axiomàtic, sinó la nostra millor descripció científica de l'espai físic.
- Des de temps ben antics fins al segle XVII hi havia enardides discussions sobre si una recta es compon d'infinitesimals o d'indivisibles.
- El teorema de Gödel va avortar el programa de Hilbert encaminat a provar que les matemàtiques eren completes i consistents.
- Els infinitèsims, desacreditats en matemàtiques al llarg d'un segle, van renéixer gràcies a la invenció (o descobriment?) que va fer A. Robinson de l'anàlisi no estàndard.

Evidentment tothom és lliure, si això el reconforta, de creure en una proposició que actualment s'ha demostrat científicament o matemàtica que no és correcta; però aquesta serà una decisió privada, sense possibilitat (actual!) de justificació científica —quelcom semblant a admetre com a veritable que «l'ànima està localitzada a l'epífisi». Però algú que vulgui comunicar quelcom que creu que és cert ha de saber explicar-ho. Si em dieu que és cert, tot i que fins ara no s'hagi pogut demostrar, que per tot n existeixen $n!$ xifres 7 consecutives en el desenvolupament decimal de π, tot seguit m'haureu d'explicar què enteneu per «cert». A vegades es donaven explicacions que es basaven en el pensament de Déu; actualment queda molt més elegant parlar d'ordinadors que funcionen eternament.

Què podria representar que, en alguna època futura, la hipòtesi del continu fos jutjada com a sense sentit o irrellevant per la teoria científica o matemàtica més avançada d'aquell moment? És difícil de contestar, perquè el fet d'arribar al consens sobre això s'hauria de basar en nous coneixements que no podem albirar encara. Però podem inventar alguns guions:

a) Es descobreix un nou tipus inquietant d'anomalia teòrico conjuntista que ens convenç que per donar sentit als conjunts és absolutament essencial alguna forma de constructivisme.

b) Els neuròlegs i els psicòlegs aconsegueixen comprendre tan bé els mecanismes de les assemblees de cèl·lules i del coneixement que poden demostrar científicament que no és possible que hi hagi cap activitat del sistema nerviós que es correspongui amb un valor de veritat de la hipòtesi del continu.

c) Es formalitza un determinat tipus de justificacions d'alt nivell, teòriques o extrínseques que ens arriben a convèncer que la hipòtesi del continu entra en conflicte amb els punts de vista més àmpliament acceptats sobre la realitat matemàtica.

El meu guió preferit és *b*). Fins i tot en absència d'aquests descobriments biològics, penso que és altament probable que la nostra capacitat d'elaborar definicions matemàtiques ja ha anat molt més enllà de les possibilitats de les assemblees de cèl·lules per a descobrir res de nou sobre la hipòtesi del continu.

Per al realista matemàtic, la veritat relativa a les entitats matemàtiques és exactament tan problemàtica com la veritat pel que fa als objectes físics —però no més. Les actuals teories matemàtiques, a l'igual que les teories físiques, són aproximadament correctes; però no hi ha cap raó per creure que són infal·libles o que qualsevol qüestió que avui és significativa demà encara ho serà.

7. Conclusions

> No crec pas que les dificultats que la filosofia troba avui en les matemàtiques clàssiques siguin dificultats genuïnes; més aviat crec que les interpretacions filosòfiques de les matemàtiques que oferim d'una banda i de l'altra són totes errònies, i que una «interpretació filosòfica» és justament allò que les matemàtiques no necessiten. [HILARY PUTNAM]

La professora Maddy presenta una enèrgica fonamentació filosòfica del fet que les matemàtiques s'elaboren sobre coses reals, redactada amb claredat des del punt de vista intuïtiu per als que treballen en matemàtiques. Accepta l'argument de Quine/Putnam que, si més no, algunes entitats matemàtiques són reals perquè són indispensables per a la física i, alhora, també considera la tesi de Gödel en el sentit que tenim una predisposició envers la intuïció matemàtica, i la fa seva basant-se en mecanismes neurològics, especulatius però plausibles.

Des del seu punt de vista, tenim capacitat per a percebre no solament els objectes físics individuals sinó també conjunts d'aquests objectes, i percebre'ls *com a* conjunts. Determinats canvis en l'estructura neurològica ens donen la possiblitat d'assolir intuïcions sobre conjunts i sobre les operacions elementals entre ells, anàlogues a les intuïcions que podem tenir sobre longituds i d'altres propietats físiques dels objectes. Els nombres cardinals no són conjunts sinó propietats del conjunts. El cos dels nombres reals és un muntatge elaborat per a explicar les intuïcions que tenim sobre continuïtat.

La intuïció no arribaria més enllà com a justificació adequada del realisme matemàtic si no ens endinséssim en les parts més teòriques de la teoria de conjunts. En aquest punt necessitem «arguments no demostratius» per tal de justificar axiomes rebuscats o bé per decidir-nos entre dos sistemes d'axiomes; ens basarem en l'evidència de la seva plausibilitat pel fet

d'arribar a conseqüències demostrables. Maddy acaba així:

> El que he intentat és una modesta contribució a aquest projecte. El pas següent, l'avaluació d'aquesta evidència, és una tasca descoratjadora, però jo pretenc que la teoria de conjunts realista s'enfronti a aquesta prova amb la companyia distingida de pensadors que representen una àmplia gamma de filosofies matemàtiques enfrontades, l'estructuralisme, el modalisme i una versió del nominalisme entre elles.

Recomano molt aquest llibre, seriós i provocatiu, sobre tot als matemàtics i a les matemàtiques amb aficions filosòfiques.

Ens ha semblat que podíem cloure aquesta secció de **Llibres** tot enllaçant els dos articles. Transcrivim un fragment de les CONCLUSIONS del llibre de Josep Pla pel qual l'IEC li va atorgar el Premi Ferran Sunyer i Balaguer.

> Hem vist com certs resultats importants de la matemàtica actual —que són *indecidibles* en el si de la teoria de conjunts de Zermelo-Fraenkel, àdhuc si hi afegim l'axioma de l'elecció o la hipòtesi general del continu— admeten una resposta o bé una altra, segons quina sigui la *ulterior* teoria de conjunts que ens procurem.
>
> Així doncs, hem vist de quina manera axiomes diferents ens procuren resultats oposats —o, si més no, divergents— de certs problemes purament matemàtics que, en el si de la *teoria usual de conjunts*, restaven com a qüestions obertes. De fet, hem establert la *indecidibilitat*, a **Z.-F.**, d'aquestes qüestions.

[JOSEP PLA I CARRERA. *Axiomes alternatius de la teoria de conjunts i llur influència en matemàtiques.* **Premi Ferran Sunyer i Balaguer 1992. IEC. Barcelona, 1993]**

Us deixem l'anàlisi a vosaltres, lectores i lectors.

Problemes

Problemes proposats

A26. Sigui n un enter positiu donat i considerem $f(x) = x^n$ on $x = 1, 2, 3, \ldots$ Els dígits de $f(1), f(2), \ldots$ es col·loquen uns a continuació dels altres per a formar un decimal infinit que anomenen y_n:

$$y_n = 0, \langle f(1)\rangle\langle f(2)\rangle\langle f(3)\rangle \ldots$$

Per exemple,

$$y_2 = 0,1491625364964\ldots$$

Quins valors de n fan que y_n sigui racional?

A27. Dues circumferències són tangents interiorment en el punt T. Sigui AB una corda de la circumferència exterior tangent a la circumferència interior en el punt P. Demostreu que TP és la bisectriu de l'angle $\widehat{ATB}$.

A28. (Proposat per Edgar Güeto de la FME de la UPC) Proveu que per a qualssevol m, n enters positius, existeixen $r, (r \geq 3)$ nombres enters positius $m < a_1 < a_2 < \ldots < a_r$ tals que

$$n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_r}.$$

A29. (Proposat per Edgar Güeto de la FME de la UPC) Si n és un enter positiu, definim

$$r(n) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{n}\right],$$

on $[x]$ denota la part entera de x. Trobeu els n pels quals $r(n) + 1 = r(n+1)$.